Senfkrapfen

FRIEDRICH BARTH & RUDOLF HALLER, MÜNCHEN

Zusammenfassung: *Von N gleich aussehenden Objekten seien S Objekte defekt. Ein Prüfer entnimmt ein Objekt auf gut Glück um festzustellen, ob es defekt ist. Der Hersteller kann die Objekte dem Prüfer auf verschiedene Art präsentieren. Hängt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Prüfer ein defektes Stück entdeckt, von der Art der Präsentation ab? Diese Situation wird im Beitrag beispielhaft und anschaulich vorgeführt. Sie lässt sich auch im Unterricht nachspielen, indem man geeignete gleich aussehende Objekte verwendet, von denen einige verändert sind, ohne dass dies unmittelbar erkennbar ist.*

Eine Faschingseinladung mit Überraschung

Zita[1] lädt zu einem Faschingsabend[2] mehrere Freunde ein, unter ihnen auch Xaver[3], dem sie einen Streich spielen will. Dazu bäckt sie N Krapfen[4], von denen sie S Stück mit Senf statt mit Marmelade füllt ($1 \leq S < N$). Da sie in der Schule Stochastik gelernt hat, überlegt sie, auf welche Art und Weise sie ihre Krapfen auf verschiedenen Tellern arrangieren kann, damit Xaver, der als Erster einen Krapfen nehmen darf, höchstwahrscheinlich in einen Senfkrapfen beißt. Xaver wählt auf gut Glück einen Teller und nimmt sich von diesem Teller einen Krapfen.

1. Art. Zita legt alle Krapfen auf einen Teller. Mit welcher Wahrscheinlichkeit $P(X)$ tritt das Ereignis $X :=$ »Xaver greift sich einen Senfkrapfen« ein? Welcher Wert ergibt sich für $P(X)$ für $N = 18$ und $S = 3$?

Lösung. $P(X) = \frac{S}{N}$.

Speziell $P(X) = \frac{3}{18} \approx 16{,}7\ \%$.

2. Art. Zita arrangiert ihre 18 Krapfen auf drei Tellern zu je sechs so, dass auf dem ersten Teller ein Senfkrapfen, auf dem zweiten zwei und auf dem dritten kein Senfkrapfen liegt.

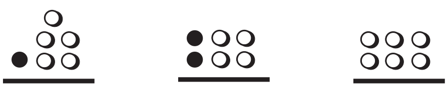

Abb.1: Die Verteilung von 3 Senfkrapfen und 15 Krapfen auf drei Teller gemäß der **2. Art**

Mit welcher Wahrscheinlichkeit greift Xaver sich einen Senfkrapfen?

$$P(X) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\ \%.$$

Verallgemeinerung

2V. Zita legt auf n Teller jeweils gleich viele Krapfen. Dazu muss die Anzahl N der gebackenen Krapfen ein Vielfaches von n sein. Zeige: Die Wahrscheinlichkeit, dass Xaver einen Senfkrapfen nimmt, ist unabhängig von der Verteilung der S Senfkrapfen auf die n Teller.

Lösung. Auf den i-ten Teller werden $\frac{N}{n}$ Krapfen, darunter s_i Senfkrapfen gelegt, wobei $S = \sum_{i=1}^{n} s_i$ ist.

Dann gilt $P(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{\frac{N}{n}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} s_i = \frac{S}{N}$,

d. h., $P(X)$ hängt nicht von der Verteilung der Senfkrapfen auf die Teller ab.

3. Art. Zita hat sieben Krapfen gebacken und füllt vier davon mit Senf. Sie verteilt sie so auf zwei Teller, dass auf jedem Teller mindestens ein Krapfen liegt.

a) Welche Arrangements kann Zita vornehmen?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beißt Xaver jeweils in einen Senfkrapfen? Bei welcher Anordnung wird diese Wahrscheinlichkeit maximal?

Lösung

a) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit legt Zita, da die Teller ja vertauschbar sind, auf Teller A höchstens drei Krapfen und damit auch höchstens drei Senfkrapfen. Damit ergeben sich die folgenden Arrangements (siehe Tabelle 1).

b) Liegen auf Teller A k Krapfen ($1 \leq k \leq 3$), wovon s Krapfen Senfkrapfen sind ($0 \leq s \leq k$), dann erhält man aus dem Baumdiagramm (Abbildung 2)

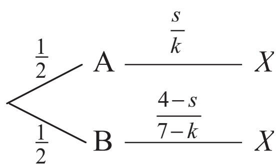

Abb. 2: Baum zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(X)$ für den Fall der Präsentation **3. Art**

$$P(X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{k} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4-s}{7-k}.$$

Damit errechnen sich die $P(X)$-Werte von Tabelle 1. Man entnimmt ihr, dass $\max\{P(X)\} = 0{,}75$ ist, falls man einen Senfkrapfen auf Teller A und die drei restlichen Senfkrapfen auf Teller B legt.

Teller A		Teller B		
Anzahl s der Senfkrapfen	Anzahl k aller Krapfen	Anzahl $S-s$ der Senfkrapfen	Anzahl $N-k$ aller Krapfen	$P(X)$
0	1	4	6	$\frac{1}{3} \approx 0{,}33333$
0	2	4	5	$\frac{2}{5} = 0{,}40000$
0	3	4	4	$\frac{1}{2} = 0{,}50000$
1	1	3	6	$\frac{3}{4} = 0{,}75000$ **Maximum**
1	2	3	5	$\frac{11}{20} = 0{,}55000$
1	3	3	4	$\frac{13}{24} \approx 0{,}54167$
2	2	2	5	$\frac{7}{10} = 0{,}70000$
2	3	2	4	$\frac{7}{12} \approx 0{,}58333$
3	3	1	4	$\frac{5}{8} = 0{,}62500$

Tab. 1: Mögliche Arrangements für die **3. Art** samt $P(X)$

Für die Wahrscheinlichkeit $P(X)$ ergibt sich der dreidimsenionale Graph aus Abbildung 3.

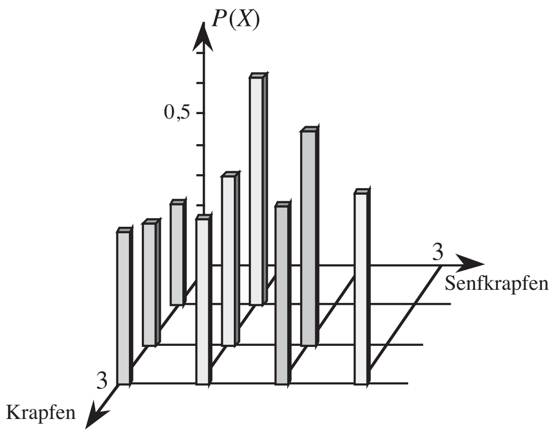

Abb. 3: Die Wahrscheinlichkeit $P(X)$ in Abhängigkeit von der Belegung von Teller A mit k Krapfen, darunter s Senfkrapfen, $1 \leq k \leq 3 \wedge 0 \leq s \leq k$

Verallgemeinerung

3V. Zita verteilt ihre N Krapfen, darunter S Senfkrapfen, so auf zwei Teller, dass auf jedem Teller mindestens ein Krapfen liegt. Zeige: Die Wahrscheinlichkeit, dass Xaver in einen Senfkrapfen beißt, wird maximal, wenn Zita auf Teller A als einzigen Krapfen einen Senfkrapfen und auf Teller B die restlichen Krapfen legt.

Lösung. Offensichtlich muss $N \geq 2$ sein. Auf Teller A liegen s Senfkrapfen und insgesamt k Krapfen; auf Teller B liegen dann $S-s$ Senfkrapfen und $N-k$ Krapfen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $k \leq N-k$, da ja die Teller vertauscht werden können. Dann gilt

$$0 \leq s \leq S,\ 1 \leq k \leq \frac{1}{2}N,\ s \leq k\,.$$

Das Baumdiagramm aus Abbildung 4 liefert

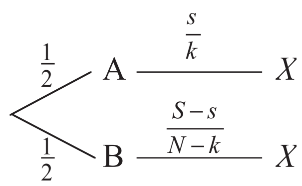

Abb. 4: Baum zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(X)$ für den Fall **3V**

$$P(X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{k} + \frac{1}{2} \cdot \frac{S-s}{N-k}.$$

$P(X)$ ist eine Funktion der zwei ganzzahligen Variablen s und k, die aus endlichen Intervallen stammen. Maximal gibt es $\frac{1}{2}N(S+1)$ Punkte $(s|k)$, auf denen $P(X)$ definiert ist. Wir müssten also schreiben $P(X) = P_{s,k}(X)$.

Wir bestimmen nun das Maximum von $P(X)$ nach einem Vorgehen, das wir anschaulich wie folgt beschreiben können:

Sucht man den größten Bewohner eines Wohnhauses, dann bestimmt man zuerst den größten Bewohner in jedem einzelnen Zimmer. Aus den Zimmer-Größten ermittelt man anschließend den Haus-Größten.

Auf unser Problem übertragen: Wir halten zunächst k fest und bestimmen das Maximum von $P_{s,k}(X)$ für jedes konstante k. Im Diagramm von Abbildung 1 betrachtet man also zunächst die beiden Balken für $k = 1$, dann die drei Balken für $k = 2$ und schließlich die vier Balken für $k = 3$ und bestimmt jeweils den relativ größten Balken. Aus diesen drei relativ größten Balken gewinnt man dann den absolut größten Balken.

Zur rechnerischen Behandlung formen wir

$P_{s,k}(X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{k} + \frac{1}{2} \cdot \frac{S-s}{N-k}$ um zu

$$P_{s,k}(X) = \frac{N-2k}{2k(N-k)} \cdot s + \frac{S}{2(N-k)}.$$

Wegen $k \leq \frac{1}{2}N$ ist $N - 2k \geq 0$.

1. Fall: $N - 2k = 0$, d. h., $k = \frac{1}{2}N$. Das bedeutet: Auf beiden Tellern liegen gleich viele Krapfen. Dann ist $P(X) = \frac{S}{N}$, wie oben bei **2V** gezeigt.

2. Fall: Für festes k ist der Graph von $P_{s,k}(X)$ in einem $(s|P_{s,k}(X))$-Koordinatensystem eine Punktmenge, die auf einer steigenden Gerade mit der Steigung $m = \frac{N-2k}{2k(N-k)}$ und dem Achsenabschnitt $t = \frac{S}{2(N-k)}$ liegt. Das Maximum der Funktion $P_{s,k}(X)$, die nur für $0 \leq s \leq k$ definiert ist, ist ein Randmaximum an der Stelle $s = k$. Das jeweilige Randmaximum hat den Wert

$$P_{k,k}(X) = 1 - \frac{N-S}{2(N-k)}.$$

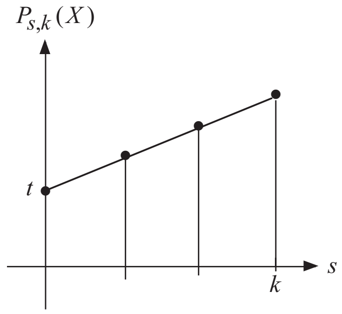

Abb. 5: Graph der Geraden $P_{s,k}(X) = ms + t$

Dieser Ausdruck wird maximal, wenn der zu subtrahierende Bruch minimal wird. Das ist der Fall, wenn der Nenner $N - k$ maximal wird, also k minimal. Dies tritt ein für $k = 1$. Somit gilt:

$$\max\{P(X)\} = P_{1,1}(X) = 1 - \frac{N-S}{2(N-1)},$$

d. h.: Auf einen Teller legt Zita als einzigen Krapfen einen Senfkrapfen, alle anderen Krapfen kommen auf den zweiten Teller.

Es ist noch zu zeigen, dass $P_{1,1}(X)$ nicht kleiner als der Maximalwert aus Fall **1** ist.

Annahme:

$$\frac{S}{N} > 1 - \frac{N-S}{2(N-1)}, \frac{N-S}{2(N-1)} > \frac{N-S}{N}, N < 2,$$

was $N \geq 2$ widerspricht. Die Annahme ist also widerlegt.

Ergebnis: Die Verteilung »Auf einen Teller legt Zita als einzigen Krapfen einen Senfkrapfen, alle anderen Krapfen kommen auf den anderen Teller« liefert maximale Wahrscheinlichkeit für das Ereignis X = »Xaver beißt in einen Senfkrapfen«.

4. Art. Zita verteilt N Krapfen, darunter S Senfkrapfen, so auf die drei Teller A, B und C, dass sie auf jeden Teller mindestens einen Krapfen legt. Falls $S = 1$ ist, legt sie auf Teller A als einzigen Krapfen diesen Senfkrapfen. Falls $S \geq 2$ ist, legt sie auf Teller A und Teller B jeweils einen Senfkrapfen als einzigen Krapfen, den Rest auf Teller C. Zeige: Die Wahrscheinlichkeit, dass Xaver bei diesen Anordnungen in einen Senfkrapfen beißt, ist maximal. – Welchen Wert hat diese maximale Wahrscheinlichkeit bei drei Senfkrapfen unter 18 Krapfen?

1. Fall: $S = 1$

Halten wir die Belegung von Teller C fest, dann wird $P(X)$ nach den Überlegungen bei **3V** maximal, wenn auf Teller A der Senfkrapfen als einziger Krapfen liegt. Es gilt also bei jeder senfkrapfenlosen Belegung von Teller C:

$$\max\{P(X)\} = \frac{1}{3}.$$

Ergebnis: Man muß den einzigen Senfkrapfen als einzigen Krapfen auf einen Teller legen; die anderen Teller können beliebig mit den Marmelade-Krapfen belegt werden.

2. Fall: $S \geq 2$

Es liegen nicht alle Senfkrapfen auf Teller C. Dann wird $P(X)$ für jede Belegung des Tellers C nach den Überlegungen bei **3V** maximal, wenn auf Teller A ein Senfkrapfen als einziger Krapfen gelegt wird. Wir bezeichnen mit $s|k$ die Belegung eines Tellers mit k Krapfen, von denen s Stück Senfkrapfen sind. Wir halten nun die $1|1$-Belegung von Teller A fest und betrachten die Teller B und C. Weil mindestens ein Senfkrapfen noch übrig ist, erhält man das Maximum von $P(X)$ nach den Überlegungen bei **3V** wieder dann, wenn einer dieser Teller, der ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Teller B sei, auch eine $1|1$-Belegung aufweist. Auf Teller C liegen dann $S - 2$ Senfkrapfen und insgesamt $N - 2$ Krapfen. Damit erhält man mit Hilfe des Baumdiagramms von Abbildung 6

$$\max\{P(X)\} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{S-2}{N-2},$$

was sich umformen lässt zu $\frac{2}{3} + \frac{S-2}{3(N-2)}$.

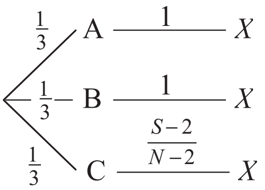

Abb. 6: Baum zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(X)$ für den 2. Fall der Präsentation **4. Art**

Ergebnis: Die Verteilung »Auf zwei Teller legt man als einzigen Krapfen einen Senfkrapfen, alle anderen Krapfen kommen auf den dritten Teller« liefert maximale Wahrscheinlichkeit für das Ereignis »Xaver beißt in einen Senfkrapfen«.

Für $N = 18$ und $S = 3$ erhält man

$$\max\{P(X)\} = \frac{2}{3} + \frac{3-2}{3(18-2)} = \frac{11}{16} \approx 68{,}75\,\%.$$

5. Art. Zita erinnert sich noch an die optimale Verteilung nach **3V**, nämlich auf Teller A als einzigen Krapfen einen Senfkrapfen zu legen, kann aber ihre Senfkrapfen nicht mehr unter ihren Krapfen identifizieren. Trotzdem legt sie auf Teller A auf gut Glück einen Krapfen und alle anderen auf Teller B. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beißt Xaver jetzt in einen Senfkrapfen?

Lösung. Wir zeichnen wieder einen Baum; darin bedeute SA := »Auf Teller A liegt genau ein Senfkrapfen«.

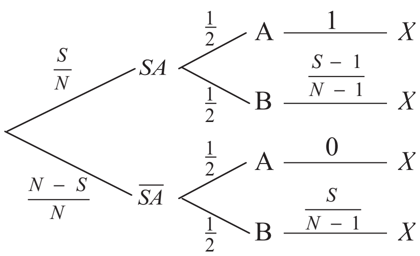

Abb. 7: Baum zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(X)$ in Abhängigkeit davon, ob auf Teller A als einziger Krapfen ein Senfkrapfen oder ein Marmeladekrapfen liegt

Aus ihm erhält man

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{S}{N}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{S}{N}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{S-1}{N-1} \\ &\quad + \frac{N-S}{N}\cdot\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{N-S}{N}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{S}{N-1} \\ &= \frac{S}{2N(N-1)}(N-1+S-1+N-S) \\ &= \frac{S}{2N(N-1)}(2N-2) = \frac{S}{N}. \end{aligned}$$

Das Ergebnis sollte nicht überraschen. Denn jetzt ist ja alles reiner Zufall, wir sind also bei der **1. Art** gelandet.

Epilog. Nach einem derartigen Faschingsabend 2006 scannte Dr. DOMINIK MORHARD vom Institut für klinische Radiologie der Universitätsklinik München verschieden gefüllte Krapfen in einem Computer- und einem Magnetresonanz-Tomographen. Aufgrund der unterschiedlichen Anteile von Wasser, Fett, Öl, Proteinen, Gelier- und Bindemittel konnte er Pudding-, Marmelade-, scharfe und süße Senfkrapfen unterscheiden. So entstand eine wissenschaftliche Publikation.

Für Xaver eignet sich dieses Verfahren nicht; denn es ist aufwändig und kostet mehrere tausend Euro.

Anmerkungen

1 umbrisch = *junges Mädchen*. Die toskanische Dienstmagd ZITA (1210/20–1272) wurde 1696 heiliggesprochen, Fest 27. April.

2 Fasching heißt in manchen Gegenden Deutschlands Karneval oder Fastnacht.

3 baskisch = *neues Haus*. Als Vorname verselbständigt aus dem Namen *Franz Xaver*, der zurückgeht auf FRANCISCO DE JASU Y XAVIER (1506–1552), einen Mitbegründer des Jesuitenordens, päpstlichen Legaten in Indien, 1549 in Japan, 1622 heiliggesprochen; Fest seit 1663 ist der 3. Dezember.

4 Im 9. Jh. bezeichnete das althochdeutsche *krapho* ein hakenförmiges Gebäck, das im Mittelalter *krapfe* hieß. In Berlin und vielen Teilen Ostdeutschlands heißt der bayerische Krapfen *Pfannkuchen*, in vielen Gebieten Nord-, West- und Südwestdeutschlands hingegen *Berliner*.

Literatur

Morhard, D., u. a. (2008): Die diagnostische Wertigkeit von Dual-Energy-CT und 3 Tesla-MRT in der Diagnose von Faschingskrapfen (Berliner Pfannekuchen) – Wo ist die Marmelade, wo der Senf und wo der Pudding? In: *Fortschritte auf dem Gebiet der Röntgenstrahlen und bildgebenden Verfahren,* Heft 4.

Anschrift der Verfasser

Friedrich Barth
Abbachstr. 23
80992 München
e.f.barth@t-online.de

Rudolf Haller
Nederlinger Str. 32a
80638 München
rudolf.haller@arcor.de